ある pretzel knot の non-orientable 4-genus について

広島大学　大学院先進理工系科学研究科　数学プログラム
姫野圭佑 (Keisuke HIMENO) *

概要

3 次元球面内の結び目の non-orientable 4-genus とは，結び目を 4 次元球体の境界 (= 3 次元球面) にあるとみなして，その結び目が 4 次元球体内で張る向き付け不可能な曲面の crosscap の最小個数である．その決定は難しく，torus knot ですら完全に決定されていない．本講演では，いくつかの pretzel knot で non-orientable 4-genus を決定できたのでそれを紹介する．

1　導入

3 次元球面 S^3 内の円周 S^1 に微分同相な部分多様体を**結び目**という．二つの結び目が S^3 の向きを保つ同相写像で写り合う時，それらは**同値である**という．以降，同値な結び目は区別しない．

結び目を調べる上で曲面は重要である．結び目理論に現れる曲面で最も有名なものは Seifert 曲面だろう．結び目 $K \subset S^3$ に対し，

(a) S^3 内の向きづけ可能，コンパクト，連結な曲面 S で，$\partial S = K$

をみたすものを K の **Seifert 曲面**という．これを用いて結び目 K の**種数** (3-genus) $g_3(K)$ を

$$g_3(K) := \min\{g(S) \mid S \text{ は } K \text{ の Seifert 曲面 ((a) を満たす曲面)}\}$$

で定める ($g(S)$ は S の種数)．これは非負整数値の結び目不変量 (同値な結び目に対して同じ値を取る) である．

さて，S^3 を 4 次元球体 B^4 の境界とみなす．B^4 内で「Seifert 曲面」を考える，つまり，S を

(b) B^4 に適切に埋め込まれた向きづけ可能，コンパクト，連結な曲面であって，$\partial S = K (\subset S^3 = \partial B^4)$

を満たすものとする． このような S について種数と同様に，K の 4 **次元種数** (4-genus) $g_4(K)$ を

$$g_4(K) := \min\{g(S) \mid S \text{ は (b) を満たす曲面 }\}$$

で定めることができる．これも非負整数値の結び目不変量であり，定義から $g_4(K) \leq g_3(K)$ が成立し，一般に等号は成立しない．

上の話の向きづけ不可能版を考えることができる．つまり，

(c) S^3 内の向きづけ不可能，コンパクト，連結な曲面 F で，$\partial F = K$,

(d) B^4 に適切に埋め込まれた向きづけ不可能，コンパクト，連結な曲面 F で，$\partial F = K (\subset S^3 = \partial B^4)$

* himeno-keisuke@hiroshima-u.ac.jp

という二条件を考え，K の**向きづけ不可能種数** (non-orientable 3-genus) $\gamma_3(K)$ と 4 **次元向きづけ不可能種数** (non-orientable 4-genus) $\gamma_4(K)$ をそれぞれ

$$\gamma_3(K) := \min\{\beta_1(F) \mid F \text{ は (c) を満たす曲面 }\}$$
$$\gamma_4(K) := \min\{\beta_1(F) \mid F \text{ は (d) を満たす曲面 }\}$$

で定める．$\beta_1(F)$ は F の first Betti number であり，このセッティングでは F の crosscap の個数と一致する．それゆえ，γ_3, γ_4 はそれぞれ (3 次元) crosscap number，4 次元 crosscap number と呼ばれることもある．

本研究は，non-orientable 4-genus γ_4 に着目したものである．γ_4 が最初に考えられたのは [12] であり，そこでは 4-genus と 4 次元 clasp number との関連が調べられた．その後，少しずつ結び目の γ_4 が調べられ，現在では Knotinfo にある結び目のリスト [11] のうち，交差数が 10 以下が解決されており，交差数が 11 のものは約三分の一解決されている [3, 5, 9]．一方，すべての torus knot について γ_4 は決定できていない．torus knot を簡単に紹介すると，S^3 に標準的に埋め込まれたトーラス上に乗るような結び目のことであり，まず調べるべき結び目のクラスの一つである．torus knot の γ_4 については [1, 2, 4, 10] を参照.

いずれにせよ，結び目の non-orientable 4-genus γ_4 の決定は難しく，先行研究も少ない.

2 主定理

本研究はいくつかの pretzel knot に対して，新たに non-orientable 4-genus γ_4 を決定したというものである．本稿で考える pretzel knot は，三つの整数 p, q, r を用いて $P(p, q, r)$ と表される (一般には三つでなくても良い)．図 1 を参照．さらに，p, q, r は正の整数であることを仮定しておく．こうすることで，$P(p, q, r)$ は **alternating knot** (交差点の上下が交互に現れる図式を持つ結び目) となる.

よく知られている事実を述べておく.

- multiset として $\{x, y, z\} = \{p, q, r\}$ ならば，$P(x, y, z) = P(p, q, r)$．つまり，パラメータの順番は関係ない.
- $P(p, q, r)$ が結び目であるための必要十分条件は，偶数のパラメータが高々一つであること．それ以外は**絡み目**，つまり，S^3 内の複数の S^1 の非交和と微分同相な部分多様体になってしまう.

本稿では結び目を考えたいので，$P(p, q, r)$ の偶数のパラメータは無いか一つだけである．偶数のパラメータがない場合，$P(p, q, r)$ を**奇数型**と呼ぶ．同様に，偶数のパラメータが一つあるとき，$P(p, q, r)$ を**偶数型**と呼び，p が偶数であるとして良い.

次が主定理である.

定理 1. (1) $K = P(p, q, r)$ が偶数型で p を偶数とする．以下の条件のどちらかを満たす時，$\gamma_4(K) = 2$ である.

- mod 4 で，$p \equiv 0$ かつ，q と r のうち少なくとも一方は 3 と合同,

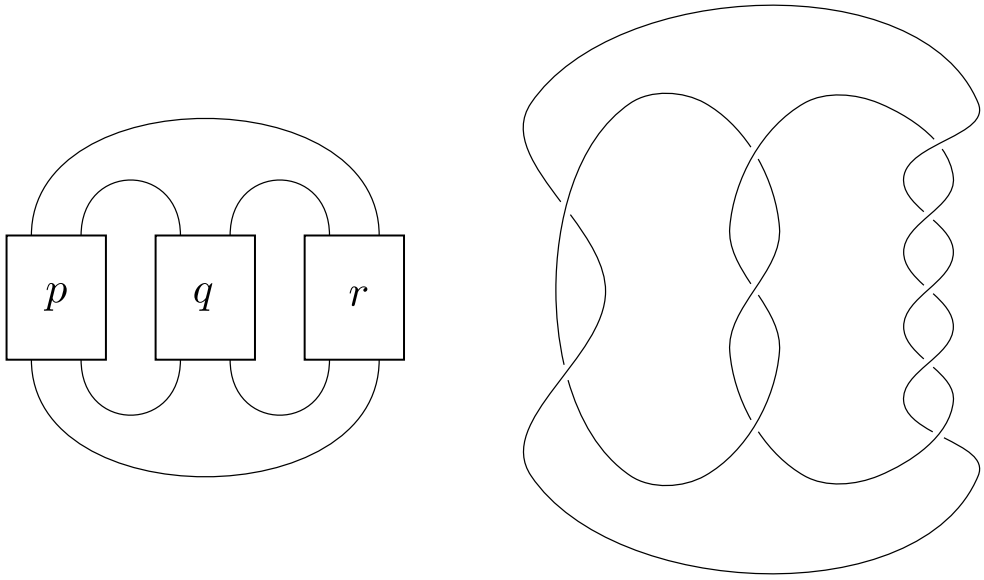

図 1　(左) pretzel knot $P(p,q,r)$．各パラメータは縦方向の右半ひねりの個数を表す．(右) pretzel knot $P(2,3,5)$.

- mod 4 で，$p \equiv 2$ かつ，q と r のうち少なくとも一方は 1 と合同.

(2) 奇数型 $K = P(p,3,5)$ について，$\gamma_4(K) = 2$.

注意 1. 偶数型 $K = P(p,q,r)$ について $\gamma_4(K) \leq 2$ は分かっているが，条件を満たさないもので唯一決定できているものは，$\gamma_4(P(2,3,3)) = 1$ のみである [9].

3　判定道具

non-orientable 4-genus γ_4 の決定には主に二つのステップが必要である．例えば，$\gamma_4(K) = 2$ を示すには，「4 次元球体 B^4 内の $\beta_1(K) = 2$ となる適切な向きづけ不可能な曲面を構成する」「$\gamma_4(K) \geq 2$ であること」を示さなければならない． 前者はバンド手術を用いて構成，後者は Goeritz 行列から来るある二次形式の埋め込みを考える，という手法を紹介する．

3.1　向きづけ不可能バンド手術

$K \subset S^3$ を向きづけられた結び目とする．band $B = [0,1] \times [0,1]$ を，$[0,1] \times \partial[0,1] \subset K$ かつ B の向きから誘導される ∂B の向きが K と一致しないように S^3 に埋め込む．そして，$K' = (K - [0,1] \times \partial[0,1]) \cup (\partial[0,1] \times [0,1])$ とすると，K' は結び目である．こうして K から K' を得る操作を **向きづけ不可能バンド手術**という．図 2 を参照．K' の向きの付け方は一意に定まらないが，本稿では一つ向きを取るものとする．

結び目 K が張る 4 次元球体 B^4 内の向きづけ不可能曲面を構成する．$B^4 = (S^3 \times [0,1]) \cup_{S^3 \times \{1\}} B^4$ と捉え，K を $S^3 \times \{0\}$ に入れておく．このとき，$K \times [0,1]$ は $S^3 \times [0,1]$ に適切に埋め込まれた向きづけ可能曲面 (アニュラス) である．$[0,1]$ を時間軸と捉え，$S^3 \times \mathrm{Int}[0,1]$ で向きづけ不可

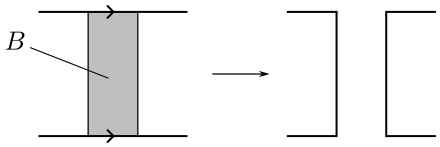

図 2　向きづけ不可能バンド手術

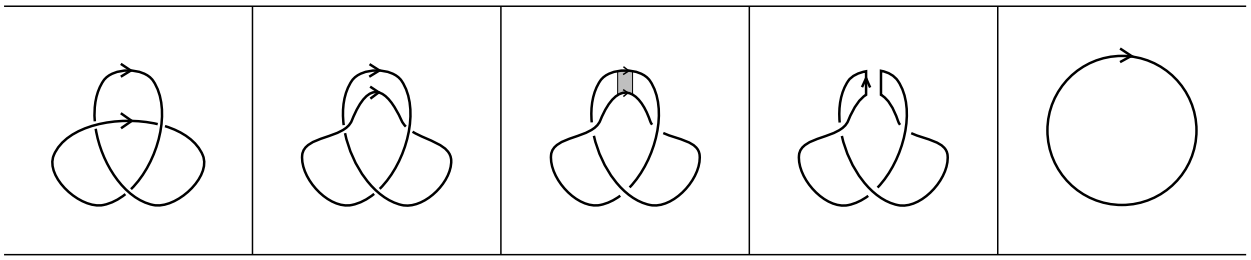

図 3　$S^3 \times [0,1]$ 内での結び目の向きづけ不可能バンド手術による変化．図は境界が trefoil in $S^3 \times \{0\}$ と unknot in $S^3 \times \{1\}$ となっている向きづけ不可能曲面 $F \in S^3 \times [0,1]$ の，$S^3 \times \{1/4\}, S^3 \times \{1/2\}, S^3 \times \{3/4\}$ による断面を表している．

能バンド手術を施すと，そこに saddle point が発生する，つまり，first Betti number が増える．しかも向きづけ不可能な曲面になる．n 回向きづけ不可能バンド手術を施して，$g_4(K') = 0$ となる K' になって，向きづけ不可能曲面 $F \subset S^3 \times [0,1]$ を得たとする ($\partial F = K \cup K'$)．このとき，$K' \subset S^3 \times \{1\}$ であり，(B^4, D^2) を $(S^3 \times \{1\}, K')$ で $(S^3 \times [0,1], F)$ に貼れば，$\partial F \cup D^2 = K$ となる向きづけ不可能曲面 $F \cup D^2$ で $\beta_1(F \cup D^2) = n$ をみたすものを B^4 で構成できたことになる．図 3 を参照.

以上より次を得る.

命題 1. 結び目 K に向きづけ不可能バンド手術を n 回施して，$g_4(K') = 0$ をみたす K' に変形できたとする．このとき，$\gamma_4(K) \leq n$ が成立.

3.2　Goeritz 行列と二次形式の埋め込み

有名な結び目不変量に **signature** $\sigma(K) \in \mathbb{Z}$ と **Arf 不変量** $\mathrm{Arf}(K) \in \{0,1\}$ がある．[13] の結果から次が得られる ([8, Theorem 2.1] 参照).

命題 2. $\sigma(K) + 4\mathrm{Arf}(K) \equiv 4 \pmod 8$ のとき，$\gamma_4(K) \geq 2$ である.

[9] で，この命題の発展バージョンが与えられた，それを紹介する.

まず，Goeritz 行列を定義する．結び目の図式によって分割された平面領域を白と黒で塗り分け (チェッカーボード彩色)，白領域に $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とラベルを割り当てる．さらに，D の各交点に図 4 のように符号を割り当てる．$i \neq j$ に対し，X_i と X_j の間の符号の合計を g_{ij} とする．そして，

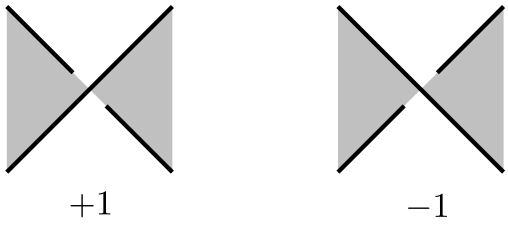

図 4　領域を白黒に分けたときの，交点の符号の付け方.

$g_{ii} = -\sum_{i \neq j} g_{ij}$ とする．こうして得られる行列 $G' = (g_{ij})$ を **pre–Goeritz 行列**といい，G' から好きに一行一列取り除いた行列 G を **Goeritz 行列** という．G 自体は図式 D や取り除く行や列に依存するが，この後の議論はそれらに依らない．また，定義より G は対称行列である．さらに，白領域と黒領域を入れ替えることで，もう一つ Goeritz 行列が手に入る．図式が alternating であるとき，二つの Goeritz 行列は定値であり，片方が正定値，もう一方が負定値である [6, 7].

引き続き，G を $n \times n$ 対称行列であるとする．$G \oplus [d]$ $(d \in \mathbb{Z})$ で，G に $(n+1, n+1)$ 成分が d でそれ以外 0 となる $(n+1)$ 行目と $(n+1)$ 列目を追加した行列を表すことにする．二次形式 $(\mathbb{Z}^{n+1}, G \oplus [d])$ を考える．つまり，$e_1, \ldots, e_{n+1}$ を $\mathbb{Z}^{n+1}$ の標準的な基底とし，$(G \oplus [d])_*(e_i, e_j) := (G \oplus [d]$ の (i,j) 成分$)$ で定義される双線型写像 $(G \oplus [d])_* \colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ がある．簡単のため，$e_i \cdot e_j := (G \oplus [d])_*(e_i, e_j)$ とする．また，$\pm\mathrm{Id}(e_i, e_j) := \pm\delta_{ij}$ として，双線形写像 $\mathrm{Id} \colon \mathbb{Z}^{n+1} \to \mathbb{Z}^{n+1}$ を定める．双線形写像 $\phi \colon (\mathbb{Z}^{n+1}, G \oplus [d]) \to (\mathbb{Z}^{n+1}, \pm\mathrm{Id})$ が **二次形式の埋め込み** であるとは，ϕ は単射で $\pm\mathrm{Id}(\phi(e_i), \phi(e_j)) = e_i \cdot e_j$ が成立しているときをいう.

これで判定条件を与えることができる．紹介するのは [8] によりさらに改良されたものである．結び目 K の **determinant** $\det(K) \in \mathbb{Z}$ は $\det(K) = |\det G|$ で与えられることに注意.

命題 3 ([8],[9])**.** K を alternating knot で，その alternating な図式からくる Goeritz 行列のうち，正定値なものを G_+，負定値なものを G_- とする.

(1) $\sigma(K) + 4\mathrm{Arf}(K) \equiv -2 \pmod 8$ かつ二次形式の埋め込み

$$\phi \colon (\mathbb{Z}^{n+1}, G_+ \oplus [\det(K)]) \to (\mathbb{Z}^{n+1}, \mathrm{Id})$$

が**存在しない**とき，$\gamma_4(K) \geq 2$ が成立.

(2) $\sigma(K) + 4\mathrm{Arf}(K) \equiv 2 \pmod 8$ かつ二次形式の埋め込み

$$\phi \colon (\mathbb{Z}^{n+1}, G_- \oplus [-\det(K)]) \to (\mathbb{Z}^{n+1}, -\mathrm{Id})$$

が**存在しない**とき，$\gamma_4(K) \geq 2$ が成立.

(3) $\sigma(K) + 4\mathrm{Arf}(K) \equiv 0 \pmod 8$ かつ二次形式の埋め込み

$$\phi \colon (\mathbb{Z}^{n+1}, G_\epsilon \oplus [\epsilon \det(K)]) \to (\mathbb{Z}^{n+1}, \epsilon\mathrm{Id})$$

が $\epsilon = 1$ と $\epsilon = -1$ でともに**存在しない**とき，$\gamma_4(K) \geq 2$ が成立.

(4) $\sigma(K) + 4\mathrm{Arf}(K) \equiv 4 \pmod 8$ かつ二次形式の埋め込み

$$\phi \colon (\mathbb{Z}^n, G_\epsilon) \to (\mathbb{Z}^{n+2}, \epsilon\mathrm{Id})$$

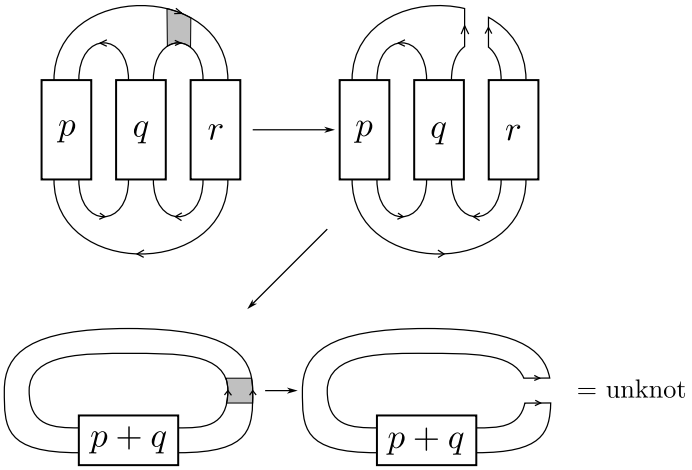

図 5　偶数型 pretzel knot を二回の向きづけ不可能バンド手術で unknot にする.

が $\epsilon = 1$ と $\epsilon = -1$ でともに**存在しない**とき，$\gamma_4(K) \geq 3$ が成立.

本稿ではこの命題の (2) しか使わない.

4　主定理について

定理 1 の証明のキーは次の命題である.

命題 4. G_- を pretzel knot $P(p,q,r)$ の標準的な alternating 図式から得られる負定値な Goeritz 行列とする．このとき，二次形式の埋め込み

$$\phi\colon (\mathbb{Z}^{\mathrm{rank}(G_-)+1}, G_- \oplus [-\det(K)]) \to (\mathbb{Z}^{\mathrm{rank}(G_-)+1}, -\mathrm{Id})$$

は存在しない.

この命題は背理法で示すことができる．これと命題 3 の (2) より次を得る.

命題 5. pretzel knot $K = P(p,q,r)$ に対し, $\sigma(K)+4\mathrm{Arf}(K) \equiv 2 \pmod 8$ であるとき, $\gamma_4(K) \geq 2$.

4.1　偶数型

偶数型 pretzel knot $K = P(p,q,r)$ (p は偶数) を考える．まずこのとき，二回の向きづけ不可能バンド手術で unknot にできる (図 5)．したがって，命題 1 より $\gamma_4(K) \leq 2$ である.

定理 1 の条件

- mod 4 で，$p \equiv 0$ かつ，q と r のうち少なくとも一方は 3 と合同,
- mod 4 で，$p \equiv 2$ かつ，q と r のうち少なくとも一方は 1 と合同.

をみたすとき，$\sigma(K) + 4\mathrm{Arf}(K) \equiv 2, 4 \pmod 8$ である．したがって，命題 2, 5 より，このとき，$\gamma_4(K) = 2$ である.

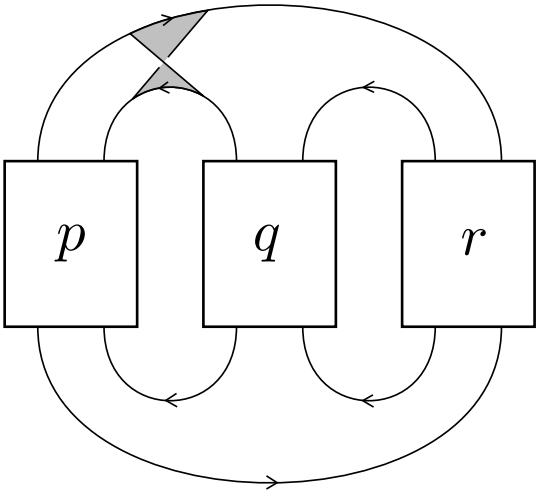

図 6　奇数型 pretzel knot を一回の向きづけ不可能バンド手術で偶数型にする．

注意 2. 定理 1 の条件をみたさないとき，$\sigma(K)+4\mathrm{Arf}(K)\equiv 0 \pmod 8$ である．命題 3 より，二次形式の埋め込み $\phi\colon (\mathbb{Z}^{n+1}, G_+\oplus[\det(K)])\to(\mathbb{Z}^{n+1},\mathrm{Id})$ が存在しないことを示せれば，$\gamma_4(K)=2$ と言える．しかし，いくつか実験してみたところ，この二次形式の埋め込みは構成できてしまう．他にも，γ_4 の下からの評価を与える道具はあるが，$\gamma_4=1$ を否定できていない状況である．また，実際，$\gamma_4(P(2,3,3))=1$ である [9].

4.2　奇数型

図 6 が示すように，奇数型 pretzel knot $K=P(p,q,r)$ は一回の向きづけ不可能バンド手術で偶数型 $P(p+1,q,r)$ に変形できる．したがって，$\gamma_4(K)\le 3$ である．

定理 1 (2) の pretzel knot $K=P(p,3,5)$ (p は奇数) は二回の向きづけ不可能バンド手術で unknot にできる (図 7)．このとき，$\sigma(K)+4\mathrm{Arf}(K)\equiv 2 \pmod 8$ なので，命題 5 より $\gamma_4(K)=2$ と結論づけられる．

5　コメント

偶数型，奇数型ともにまだまだ完全決定には程遠いうえ，p,q,r に負の整数がある場合も調べたい．しかし，取り組めば分かるというものでもない．注意 2 でも述べたように，知られている判定道具すべてを使っても決定できていない例がある．つまり，新たな判定道具を作る必要があるがそれは簡単な話ではないはずだ．また，実際にバンド手術を構成するのも難しい．図 7 のバンド手術もよく見つけたなと，自分でも思う．

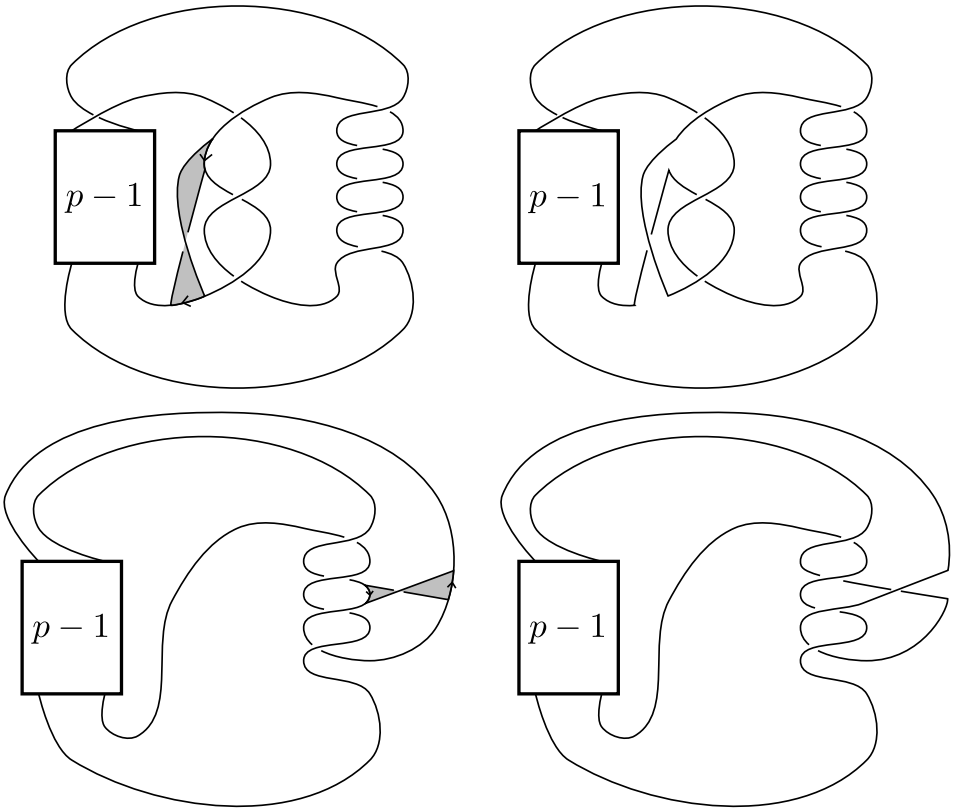

図 7　pretzel knot $P(p,3,5)$ (p は奇数) を二回の向きづけ不可能バンド手術で unknot にする．左上，右上，左下，右下の順に変形し，最後の右下は unknot になっていることは簡単な変形で確認できる．

参考文献

[1] Joshua Batson, *Nonorientable slice genus can be arbitrarily large*, Math. Res. Lett. **21** (2014), no. 3, 423–436.

[2] Fraser Binns, Sungkyung Kang, Jonathan Simone and Paula Truöl, *On the nonorientable four-ball genus of torus knots*, preprint. arXiv:2109.09187.

[3] Megan Fairchild, *The non-orientable 4-genus of 11 crossing non-alternating knots*, to appear, J. Knot Theory Ramifications. arXiv:2403.00996

[4] Megan Fairchild, Hailey Jay Garcia, Jake Murphy and Hannah Percle, *Non-orientable 4-genus of torus knots*, preprint. arXiv:2405.04737.

[5] Nakisa Ghanbarian, *The non-orientable 4-genus for knots with 10 crossings*, J. Knot Theory Ramifications **31** (2022), no. 5, Paper No. 2250034, 46 pp.

[6] C. McA. Gordon and R. A. Litherland, *On the signature of a link*, Invent. Math. **47** (1978), no. 1, 53–69.

[7] Joshua Evan Greene, *Alternating links and definite surfaces*, Duke Math. J. **166** (2017), no.

11, 2133–2151.

[8] Jim Hoste, Patrick Shanahan and Cornelia Van Cott, *On the nonorientable 4-genus of double twist knots*, J. Knot Theory Ramifications **32** (2023), no. 5, Paper No. 2350036, 30 pp.

[9] Stanislav Jabuka and Tynan Kelly, *The nonorientable 4-genus for knots with 8 or 9 crossings*, Algebr. Geom. Topol. **18** (2018), no. 3, 1823–1856.

[10] Stanislav Jabuka and Cornelia Van Cott, *On a nonorientable analogue of the Milnor conjecture*, Algebr. Geom. Topol. **21** (2021), no. 5, 2571–2625.

[11] Charles Livingston and Allison H. Moore. Knotinfo: Table of knot invariants. URL: http://knotinfo. math.indiana.edu, January 2025.

[12] Hitoshi Murakami and Akira Yasuhara, *Four-genus and four-dimensional clasp number of a knot*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 12, 3693–3699.

[13] Akira Yasuhara, *Connecting lemmas and representing homology classes of simply connected 4-manifolds*, Tokyo J. Math. **19** (1996), no. 1, 245–261.